

FOR EVALUATOR'S USE ONLY

Sub. Code : **20**

Optional Paper

Mathematics : Paper – I

Time : 3 Hours / Maximum Marks : 200 / Total Pages : 32

RASCM) 2012

Evaluation Table												(For Evaluator's Use Only)	
PART-A				PART-B				PART-C				Grand Total	
QN	E-1	E-2	AC	QN	E-1	E-2	AC	QN	E-1	E-2	AC	PART-A	
1				21				33				PART-B	
2				22				34				PART-C	
3				23				35				Total	
4				24				36				(-) Marks	
5				25				37				Final Total	
6				26				38				Marks In Words	
7				27				39				Remarks of Evaluator/Chief Evaluator	
8				28									
9				29									
10				30									
11				31									
12				32									
13													
14													
15												Remarks of Scrutiniser	
16													
17													
18													
19													
20													
Total													
Evalu ator's Sign													

BLANK PAGE

20 - I]

2

[Contd.



Note : Attempt all the twenty questions. Each question carries 2 marks. Answer should not exceed 15 words.

नोट : समस्त २० प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिये २ अंक निर्धारित है। उत्तर १५ शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये।

- 1 If t is a linear transformation from a vector space $V(F)$ to a vector space $V'(F)$, then show that $t(v) = -t(v) \forall v \in V$.

यदि t सदिश समष्टि $V(F)$ से सदिश समष्टि $V'(F)$, पर एक रैखिक रूपान्तरण है, तो प्रदर्शित कीजिये कि $t(v) = -t(v) \forall v \in V$.

- 2 Show that $\{1, i\}$ is a basis for the field C of complex numbers, considered as vector space over the field R of real numbers, where $i^2 = -1$.

प्रदर्शित कीजिये कि संमिश्र संख्या के क्षेत्र C , जो वास्तविक संख्या के क्षेत्र R पर एक सदिश समष्टि है, के लिए $\{1, i\}$ एक आधार है, जहाँ $i^2 = -1$ है।



3 Let $t: R^2 \rightarrow R^2$ be a linear transformation defined by :

यदि $t: R^2 \rightarrow R^2$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$t(x, y) = (x + y, x - y) \quad \forall (x, y) \in R^2.$$

Then find the matrix of t with respect to basis $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ of R^2 .

तो R^2 के आधार $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ के सापेक्ष t की मैट्रिक्स ज्ञात कीजिये।

4 Show that every subgroup of an abelian group is normal subgroup.

प्रदर्शित कीजिये कि एक आबेली समूह का प्रत्येक उप-समूह एक विशिष्ट उप-समूह होता है।

5 Write the conditions for a ring to be an integral domain.

एक वलय के पूर्णाकीय प्रान्त होने की शर्तें लिखिए।



- 6 Define field and give an example of a finite field.
क्षेत्र की परिभाषा दीजिये और परिमित क्षेत्र का एक उदाहरण दीजिये।

- 7 Find the value of $\sqrt{-\frac{1}{2}}$.
 $\sqrt{-\frac{1}{2}}$ का मान ज्ञात कीजिये।

- 8 Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ का मान ज्ञात कीजिये।



- 9 Find the radius of curvature at the point (s, ψ) on the curve $s = a \log(\sec \psi + \tan \psi)$.
वक्र $s = a \log(\sec \psi + \tan \psi)$ के बिन्दु (s, ψ) पर वक्रता-त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

10 Evaluate $\int_{-2}^1 |x| dx$.

$\int_{-2}^1 |x| dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

- 11 Prove that the series
सिद्ध कीजिए की श्रेणी

$$1 + \frac{2^p}{2} + \frac{3^p}{3} + \frac{4^p}{4} + \dots$$

is convergent for all values of p .
 p के सभी मानों के लिए अभिसारी है।



12. Prove that the set Q of rational numbers is not an open set.

सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q एक विवृत्त समुच्चय नहीं है।

13. Let f be a real valued bounded function defined on closed interval $[a, b]$. Then for any partition P of $[a, b]$, prove that

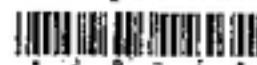
$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

यदि f संवृत्त अन्तराल $[a, b]$ पर वास्तविक मान परिवर्द्ध फलन है, तो $[a, b]$ के किसी विभाजन P के लिये सिद्ध कीजिये कि

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

14. Define uniform convergence of sequence of functions.

फलनों के अनुक्रम के लिए एक समान अभिसरण की परिभाषा दीजिये।



- 15 Write the equation of right circular cylinder whose axis is x -axis and radius is r .
एक लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण लिखिए जिसका अक्ष x -अक्ष है तथा त्रिज्या r है।

- 16 If $x-1=0$ is the directrix of the parabola $y^2-kx+8=0$, then find the values of k .
यदि $x-1=0$ परवलय $y^2-kx+8=0$ की नियता है, तो k का मान ज्ञात कीजिये।

- 17 Prove that the lines
 $x=ay+b, z=cy+d$ and $x=a'y+b', z=c'y+d'$ are perpendicular if $aa'+cc'=-1$.
सिद्ध कीजिये कि रेखाएँ $x=ay+b, z=cy+d$ और $x=a'y+b', z=c'y+d'$ लम्बवत् हैं यदि $aa'+cc'=-1$.

18 Show that the function $f(z) = x^2y - iy$ is not analytic any where.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = x^2y - iy$ कहीं भी विश्लेषिक नहीं है।

19 Find the radius of convergence of the power series.

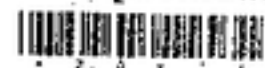
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{(1+in^2)} z^n$$

घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{(1+in^2)} z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

20 Find the nature of singularity of function

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} \text{ at } z = \pi$$

फलन $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ की $z = \pi$ पर विचित्रता की प्रकृति ज्ञात कीजिए।



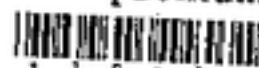
नोट : समस्त १२ प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के ५ अंक निर्धारित हैं। उत्तर ५० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

यदि $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ किसी सदिश समष्टि $V(F)$ का आधार है, तो सिद्ध कीजिये कि V का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अवयवों के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ F एक क्षेत्र है।

22 Prove that :

सिद्ध करो कि :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$



- 23 Let $(\mathbb{Z}, +)$ be the additive group of integers and $H = 3\mathbb{Z} = \{3x | x \in \mathbb{Z}\}$ be its subgroup, then find quotient group $\mathbb{Z}/H$.

माना $(\mathbb{Z}, +)$, पूर्णाकों का द्विचर संक्रिया योग के लिए समूह है और $H = 3\mathbb{Z} = \{3x | x \in \mathbb{Z}\}$ इसका एक उपसमूह है, तो खण्ड समूह $\mathbb{Z}/H$ ज्ञात कीजिये।

- 24 Prove that a field has no proper ideal.

सिद्ध कीजिए कि एक-क्षेत्र की कोई भी उचित गुणजावली नहीं होती है।



- 25 Change the order of integration in the following integral :
निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिये :

$$\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy$$

- 26 Evaluate $\int_C \frac{e^{3z}}{(z - \pi i)} dz$, where C is a circle $|z - 1| = 4$

$\int_C \frac{e^{3z}}{(z - \pi i)} dz$ का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ C , $|z - 1| = 4$ एक वृत्त है।



- 27 Prove that every finite subset of the set R of real numbers is compact.
सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संहत होता है।

28 If $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$, then find the value of $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$.

यदि $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$ हो, तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

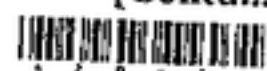


- 29 From a point P tangents are drawn to the parabola $y^2 = 4ax$. If the chord of contact of these tangents touches the rectangular hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$, then prove that the locus of P is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

किसी बिन्दु P से परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची गयी हैं। यदि इन स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा समकोणीय अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ को स्पर्श करती है, तो सिद्ध कीजिये कि बिन्दु P का बिन्दुपथ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1 \text{ है।}$$

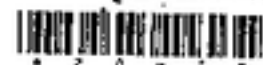


31 Find the envelope of the family of straight lines $x/a + y/b = 1$, where $ab = 4$.

सरल रेखाओं के कुल, $x/a + y/b = 1$ जहाँ $ab = 4$ है, का अन्वालोप ज्ञात कीजिये।

32 Find the Taylor's series expansion of $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ in the powers of $(z-2)$.

$(z-2)$ की घातों में फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ का टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिये।



Note : Attempt any five questions. Each question carries 20 marks. Answer should not exceed 200 words.

नोट : कोई भी ५ प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिए २० अंक निर्धारित है। उत्तर २०० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

- 33 Determine the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix A , where :
मैट्रिक्स A के लिए अभिलाक्षणिक मूल तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$



20 - I]

[Contd...



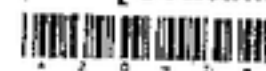
- 34 Define prime ideal and prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is prime if and only if R/I is an integral domain.
अभाज्य गुणजावली की परिभाषा दीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय R की एक गुणजावली I अभाज्य गुणजावली है यदि और केवल यदि R/I एक पूर्णाकीय प्रान्त है।



20 - I]

21

[Contd..



35 Find a cylinder of greatest volume. Which can be inscribed in a cone.

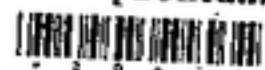
एक शंकु में उत्कीर्ण अधिकतम आयतन वाले बेलन को ज्ञात करिए।



20 - I]

23

[Contd...

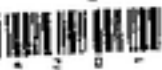


- 36 (a) Show that the eight points of intersection of the curve $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - a^2 = 0$ and its asymptotes lie on a circle $x^2 + y^2 = a^2$.

प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - a^2 = 0$ तथा इसकी अनन्तस्पर्शी के आठ प्रतिच्छेद बिन्दु एक वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित होंगे।

- (b) Prove that every real valued function which is differentiable at a point $a \in R$ is continuous at that point. Give an example to show that the converse of this result is not true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वास्तविक मानीय फलन जो कि बिन्दु $a \in R$ पर अवकलनीय है वह उस बिन्दु पर सतत भी होगा। एक उदाहरण दीजिए कि इस परिणाम का विलोम सत्य नहीं है।



20 - I]

25

[Contd...



- 37 (a) If a function f is continuous in closed interval $[a, b]$ and $c \in (a, b)$ such that $f(c) < 0$, then prove that there exists a $\delta > 0$ such that $f(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$.
 यदि फलन f संयुक्त अन्तराल $[a, b]$ में सतत है तथा $c \in (a, b)$ एक ऐसा बिन्दु है कि $f(c) < 0$ तो सिद्ध कीजिए कि एक $\delta > 0$ का अस्तित्व होगा कि $f(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$.
- (b) If $f(x) = (x - 4) \log x$, then prove that the equation $x \log x = 4 - x$ is satisfied at least one value of $x \in (1, 4)$.
 यदि $f(x) = (x - 4) \log x$, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x \log x = 4 - x$ कम से कम एक मान $x \in (1, 4)$ के लिए संतुष्ट होती है।



20-I]

27

[Contd...

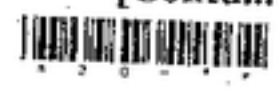


38. Prove that the equation $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$ represents a cone which touches coordinate planes. Find the equation to the reciprocal cone.
- सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$ एक शंकु को प्रदर्शित करता है जो निर्देशांक समतलों स्पर्श करता है। इसके व्युत्क्रम शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये।



20-I]

[Contd...



39 By the method of contour integration prove that :
परिरेखा समाकलन विधि से सिद्ध कीजिये कि .:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}, \quad (m \geq 0).$$

20-1]

30

[Contd...

20



